

Bericht aus dem Institut für Luft-und Raumfahrt
der Technischen Universität Berlin
ILR-Mitteilung 315 (1997)

Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade in Finite-Element-Substrukturen

von Stefan Dietz und Klaus Knothe

Der vorliegende Bericht enthält Zwischenergebnisse zu einem Vorhaben, das von der DLR und der TU Berlin gemeinsam finanziert wird. Für die Zusammenarbeit bedanken sich die Autoren bei Herrn Prof. Kortüm und Herrn Sachau vom Institut für Robotik- und Systemdynamik der DLR-Oberpfaffenhofen und Herrn Prof. Wallrapp von der FH München.

Institut für Luft- und Raumfahrt
Technische Universität Berlin
Februar 1997

Zusammenfassung

Bei Mehrkörpersimulationsrechnungen werden in der Regel modal transformierte Finite-Element-Modelle verwendet, wobei die Transformationsbeziehung durch einen Ritz-Ansatz beschrieben wird. Die Aussagekraft der modal reduzierten Finite-Element-Modelle hängt von der Auswahl der zur Transformation verwendeten Moden (Eigen- und Statikmoden) im Ritz-Ansatz ab. Im vorliegenden Bericht soll die Frage beantwortet werden, welche Art von Moden bei der Modaltransformation berücksichtigt werden müssen, um alle Zustandsgrößen des elastischen Körpers bei einer hohen Einsparung an Freiheitsgraden möglichst genau zu approximieren.

Inhaltsverzeichnis

1	Bezeichnungen	2
2	Einleitung	3
3	Formalismus der Reduktion	4
4	Einbau des reduzierten FE-Modells in lineare Bewegungsgleichungen	5
4.1	Einbau in das Fahrzeugmodell	7
5	Die Eigen- und Statikmoden des Ritz-Ansatzes	8
5.1	Starrkörpermoden	8
5.2	Statikmoden	9
5.2.1	Statikmoden aus der Vorgabe von Einheitsverschiebungen	9
5.2.2	Statikmoden aus der Vorgabe von Einheitslasten	11
5.3	Eigenmoden	13
5.4	Residuale Statikmoden	13
6	Reduktion des FE-Modells und Ergebnisse	14
6.1	MKS-Modell	14
6.2	Anforderungen an die Reduktionsverfahren	14
6.3	Reduktion mit den Eigenmoden des freien FE-Modells	15
6.4	Reduktion mit den Eigenmoden des gefesselten FE-Modells und Statikmoden aus statischer Kondensation	18
6.5	Reduktion mit den Eigenmoden des elastisch gefesselten FE-Modells und residualen Statikmoden	20
6.6	Reduktion mit den Eigenmoden des freien Systems und residualen Statikmoden	23
7	Zusammenfassung und Ausblick	24
A	Daten des Fahrzeugmodells und der Rechnung	26

1 Bezeichnungen

kleine Buchstaben

k	Anzahl der Hauptfreiheitsgrade der statischen Kondensation
r	Anzahl der Unbekannten des reduzierten FE-Modells
m	Anzahl der Unbekannten des FE-Modells
x, y, z	Koordinaten im körperfesten Koordinatensystem des Drehgestellrahmens oder des Wagenkastens
u, v, w	Verschiebung des Wagenkastens bzw. Drehgestells in x,y und z
$\beta_x, \beta_y, \beta_z$	Drehwinkel des Wagenkastens bzw. Drehgestells um x,y, und z

Vektoren

\mathbf{u}	allgemeiner Verschiebungsvektor des FE-Modells
\mathbf{q}	verallgemeinerte Freiheitsgrade des reduzierten FE-Modells
\mathbf{p}	Lastvektor
\mathbf{t}	Eigen, Statik oder Starrkörpermode

Matrizen

\mathbf{T}	Transformationsmatrix
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{D}	Dämpfungsmatrix
\mathbf{S}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{P}	Lastmatrix
\mathbf{G}	Abbildung von Starrkörpervektoren auf den Nullvektor
\mathbf{K}	Kinematik des Verbindungselementes
\mathbf{C}	Lagerung der freien Substruktur

Hochgestellte

Indizes

\circ	gefesselte Substruktur
T	transponiert

Tiefgestellte Indizes

N	Nebenfreiheitsgrade
H	Hauptfreiheitsgrade
st	starrkörper
$stat$	statisch
c	aus der Vorgabe von Einheitsverschiebungen
a	aus der Vorgabe von Einheitslasten
mod	modal
res	residual
red	Größen des reduzierten FE-Modells
n	Verbindungselement
C_n	Federelement C_n
i	Koppelstelle am Wagenkasten
j	Koppelstelle am Drehgestellrahmen
1	Einheitsgröße
Sp	Schwerpunkt

2 Einleitung

Die dynamischen Belastungen, die beispielsweise der verwindungsweiche Drehgestellrahmen eines S-Bahnfahrzeuges erfährt, können mit Hilfe eines Mehrkörper-Fahrzeugmodells ermittelt werden. In den so berechneten dynamischen Belastungen, sind die Eigenschaften des Fahrzeuges aber auch die Eigenschaften des Fahrweges und weiterer Betriebsbedingungen erfaßt.

Bei Mehrkörpersimulationen ist oft eine Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften einzelner Körper des Fahrzeugmodells notwendig. Elastische Verschiebungen werden in Mehrkörpermodellen durch einen Ritz-Ansatz beschrieben, der oft aus einigen Eigenmoden besteht, die mit Hilfe eines Finite-Element-Modells (Substruktur) ohne Vorgabe von Verschiebungsrandbedingungen am freien FE-Modell berechnet werden. Mit diesem Ritz-Ansatz werden die elastischen Deformationen hinreichend genau approximiert. Berechnet man daraus die Spannungen bzw. Schnittkraftgrößen innerhalb der Substruktur, ergeben sich keine realistischen Werte, da Eigenmoden das Schwingungsverhalten der freien Substruktur beschreiben und die Belastungen, die das Mehrkörpermodell auf die Substruktur ausübt, nicht berücksichtigt werden.

Statikmoden beschreiben die elastischen Verschiebungen der Substruktur, wenn Belastungen oder geometrische Zwangsbedingungen vorgegeben werden. Daher soll nachfolgend die Frage beantwortet werden, ob durch die zusätzliche Verwendung von Statikmoden im Ritz-Ansatz, die Wechselwirkungen der freigeschnittenen, modal reduzierten Substruktur mit dem übrigen Mehrkörpermodell korrekt beschrieben werden kann, so daß eine Be-

rechnung von Spannungs–bzw. Schnittkraftgrößen aus dem Ritz-Ansatz möglich ist, die letztendlich auf der Linearkombination einiger Statik–und Eigenmoden beruht und damit einen wesentlich geringeren numerischen Aufwand verursacht als eine Berechnung am vollständigen FE-Modell.

Als Beispiel für eine elastische Substruktur wurde der Längsträger eines Drehgestellrahmens gewählt, der mit Hilfe von Balkenelementen modelliert wurde. Die elastischen Eigenschaften aus dem linearen Balkenmodell werden in ein einfaches, lineares Fahrzeugmodell eingebaut.

Die Resultate aus dem Balkenmodell sind auf FE-Modellierungen mit Flächen oder Volumenelementen übertragbar, weil die einzige Voraussetzung die Linearität des FE-Modells ist.

3 Formalismus der Reduktion

Die Reduktion der Matrizen des FE-Modells (1) mit n Systemunbekannten

$$\mathbf{M} \mathbf{u}'' + \mathbf{D} \mathbf{u}' + \mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (1)$$

wird für allgemeine, lineare, zeitinvariante Bewegungsgleichungen durch die Gleichungen (3) bis (7) beschrieben [3] [1]. Bei allen Reduktionsverfahren wird für den Verschiebungsvektor \mathbf{u} des FE-Modells ein Ritz-Ansatz (2) bzw. (3) gemacht.

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^r \mathbf{t}_k q_k(t) \quad (2)$$

Die Eigen–und Statikmoden \mathbf{t}_1 bis \mathbf{t}_r und deren Amplituden \mathbf{q}_1 bis \mathbf{q}_r können zu einer Transformationsmatrix \mathbf{T} bzw. zu einem Amplitudenvektor \mathbf{q} zusammengefaßt werden:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u} & = & \mathbf{T} \mathbf{q}, \\ [m \times 1] & & [m \times r] [r \times 1] \end{array} \quad (3)$$

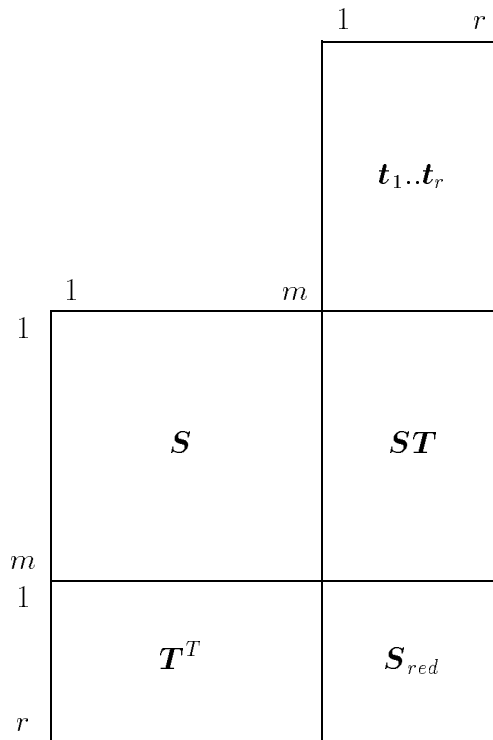
$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_r]. \quad (4)$$

Gleichung (3) stellt eine Koordinatentransformation von dem Vektorraum $(\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m)$ mit der Dimension m , in den Vektorraum $(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_r)$ der Dimension r dar. Wird diese Koordinatentransformation in das Prinzip der virtuellen Verrückungen (5) eingesetzt, ergibt sich das reduzierte FE-Modell (7), das durch die Matrizen \mathbf{M}_{red} , \mathbf{S}_{red} , \mathbf{D}_{red} und den Vektor der generalisierten Lasten \mathbf{p}_{red} beschrieben wird.

$$\delta \mathbf{u}^T [\mathbf{M} \mathbf{u}'' + \mathbf{D} \mathbf{u}' + \mathbf{S} \mathbf{u}] = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}, \quad (5)$$

$$\delta \mathbf{q}^T [\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \mathbf{q}'' + \mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{q}' + \mathbf{T}^T \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{q}] = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{T}^T \mathbf{p}, \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_{red} \mathbf{q}'' + \mathbf{D}_{red} \mathbf{q}' + \mathbf{S}_{red} \mathbf{q} = \mathbf{p}_{red}. \quad (7)$$



Am Falkschen Schema erkennt man, daß sich bei der Reduktion die Dimension des FE-Modells von m auf r verringert. Um eine große Einsparung an Freiheitsgraden zu erreichen, muß das Verhalten der Struktur für den gesamten interessierenden Frequenzbereich durch eine möglichst geringe Anzahl an Eigen- und Statikmoden \mathbf{t} erfaßt werden.

4 Einbau des reduzierten FE-Modells in lineare Bewegungsgleichungen

Im folgenden soll gezeigt werden, wie ein reduziertes FE-Modell in ein lineares Bewegungsgleichungssystem eingebaut werden kann. Das Vorgehen (siehe dazu [2]) wird anhand des Beispiels aus Bild 1 erläutert. Für den fett hervorgehobenen Teil des Fahrzeuges soll der Anteil an der Steifigkeits- bzw. Massenmatrix des Fahrzeugmodells aufgestellt werden. Der Wagenkasten soll starr, der Drehgestellrahmen elastisch modelliert werden.

Das automatisierte Aufstellen der Steifigkeitsmatrix eines Fahrzeugmodells, das aus teilweise elastisch modellierten Einzelkörpern besteht, gleicht im Prinzip dem Vorgehen für starr modellierte Einzelkörper. In jedem Fall ist für die Verbindungselemente des Fahrzeugmodells (Federn, Dämpfer, ...) eine Formulierung der Verschiebungen an den Koppelstellen, der kinematischen Beziehungen, des Kraftgesetzes und der Formänderungsenergie notwendig. Kinematische Verbindungselemente (Gelenke) werden in diesem Bericht nicht betrachtet.

Verschiebungen an den Koppelstellen : Für den starren Wagenkasten berechnen sich die Verschiebungen $\mathbf{u}_{i,n}$ an der Koppelstelle mit dem Federelement c_n aus dem Ver-

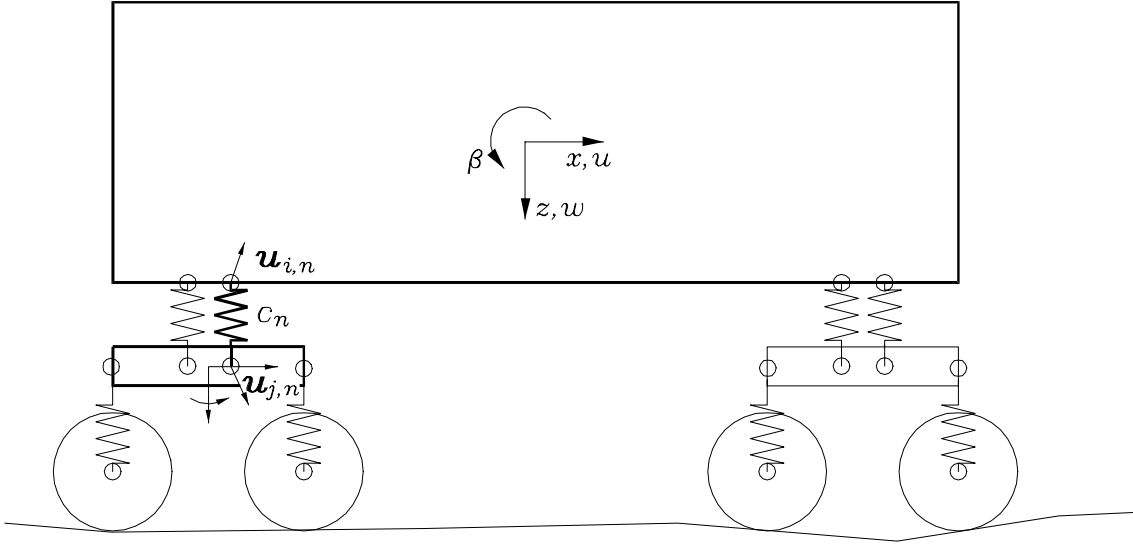


Bild 1: Vertikales Fahrzeugmodell eines Wagenkastens

schiebungsvektor \mathbf{u}_{st} eines Referenzpunktes (z.B. der Schwerpunkt) und den ersten drei Zeilen der Starrkörpertransformationsmatrix $\mathbf{R}_{i,n}$ aus Gleichung (12), wenn dort z und z_{sp} zu Null gesetzt werden.

Für den elastisch modellierten Drehgestellrahmen erhält man die Verschiebungen $\mathbf{u}_{j,n}$ an der Koppelstelle aus den entsprechenden Zeilen $\mathbf{T}_{j,n}$ der Transformationsbeziehung. Die Verschiebungen $\mathbf{u}_{j,n}$ sind dann abhängig von den \mathbf{q} Freiheitsgraden des Ritz-Ansatzes,

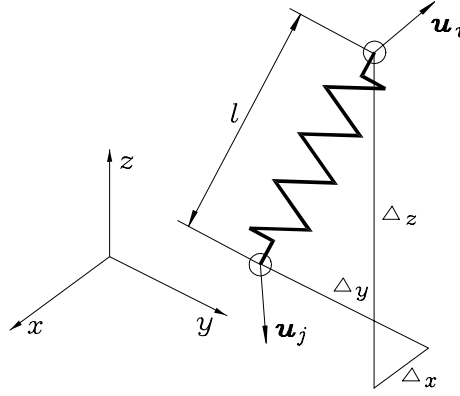
$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_{j,n} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{T}_{j,n} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{q}_j = \mathbf{T} \mathbf{q}_j.$$

Für die Federendverschiebungen ergibt sich

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i,n} \\ \mathbf{u}_{j,n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i,n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{j,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{st,i} \\ \mathbf{q}_j \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Kinematische Beziehungen : Die linearisierte Kinematik (9) eines Verbindungselementes stellt den Zusammenhang zwischen seiner Endverschiebungen $\mathbf{u}_{i,n}$ und $\mathbf{u}_{j,n}$ und seiner relativen Längenänderung v_n her [2]:

$$\begin{aligned} v_n &= \left\{ -\Delta_x/l, -\Delta_y/l, -\Delta_z/l \mid \Delta_x/l, \Delta_y/l, \Delta_z/l \right\}_n \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i,n} \\ \mathbf{u}_{j,n} \end{Bmatrix}, \quad (9) \\ &= \left\{ -\mathbf{d}_n^T \mid \mathbf{d}_n^T \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i,n} \\ \mathbf{u}_{j,n} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$



Kraftgesetz : Mit dem linearen Kraftgesetz (10) des Verbindungselementes kann die Kraft F_n , die in ihm wirkt, aus der relativen Längenänderung berechnet werden:

$$F_n = c_n v_n. \quad (10)$$

Formänderungsenergie des Federelementes : Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ergibt sich dann der Anteil der betrachteten Feder an der Systemsteifigkeitsmatrix des Fahrzeugmodells

$$\begin{aligned} \delta \Pi_n &= \delta v_n c_n v_n, \\ &= \left\{ \delta \mathbf{u}_{st,i}^T \mid \delta \mathbf{q}_j^T \right\} c_n \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{i,n}^T \mathbf{K}_n \mathbf{R}_{i,n} & -\mathbf{R}_{i,n}^T \mathbf{K}_n \mathbf{T}_{j,n} \\ \hline -\mathbf{T}_{j,n}^T \mathbf{K}_n \mathbf{R}_{i,n} & \mathbf{T}_{j,n}^T \mathbf{K}_n \mathbf{T}_{j,n} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_{st,i} \\ \mathbf{q}_j \end{array} \right\}, \\ &= \left\{ \delta \mathbf{u}_{st,i}^T \mid \delta \mathbf{q}_j^T \right\} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{c_n,ii} & \mathbf{S}_{c_n,ij} \\ \hline \mathbf{S}_{c_n,ji}^T & \mathbf{S}_{c_n,jj} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_{st,i} \\ \mathbf{q}_j \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{d}_n \mathbf{d}_n^T.$$

4.1 Einbau in das Fahrzeugmodell

Für das Teilsystem aus Bild 1 kann nun der Anteil am Bewegungsgleichungssystem aufgestellt werden:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline \mathbf{M}_{st} & & \\ \hline & \mathbf{M}_{red} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_{st,i} \\ \mathbf{q}_j \end{array} \right\}^{\bullet\bullet} + \quad (11)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & \mathbf{S}_{c_n,ii} & \mathbf{S}_{c_n,ij} \\ \hline & \mathbf{S}_{c_n,ij}^T & \mathbf{S}_{red} + \mathbf{S}_{c_n,jj} \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{st,i} \\ \mathbf{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{st,i} \\ \mathbf{p}_{red,j} \end{pmatrix}.$$

Die Anteile des Wagenkastens am Fahrzeugmodell sind

- die Starrkörpermassenmatrix \mathbf{M}_{st} ,
- Die Lagerung des Wagenkastens $\mathbf{S}_{c_n,ii}$ und
- der Belastungsvektor \mathbf{p}_{st} .

In der zweiten Zeile von Gleichung (11) stehen die Anteile des Drehgestellrahmens

- Die Massenmatrix \mathbf{M}_{red} ,
- die Steifigkeitsmatrix \mathbf{S}_{red} ,
- der Belastungsvektor \mathbf{p}_{red} des reduzierten FE-Modells und
- die Lagerung des freien Drehgestellrahmens $\mathbf{S}_{c_n,jj}$.

Die Freiheitsgrade der beiden Einzelkörper sind durch die Matrix

- $\mathbf{S}_{c_n,ij}$

bzw. deren Transponierte miteinander gekoppelt. Die Matrizen \mathbf{M}_{red} , \mathbf{S}_{red} und $\mathbf{T}_{j,n}$, sowie der Vektor \mathbf{p}_{red} treten allgemein für elastisch modellierte Einzelkörper in Mehrkörpersystemen auf und müssen über eine geeignete Schnittstelle [6] vom FE-Programm an das jeweilige MKS-Programm übergeben werden.

Der Formalismus der Transformation und der Einbau der elastisch modellierten Körper in das Mehrkörpermodell ist für alle nachfolgend untersuchten Reduktionsverfahren mit dem beschriebenen Schema identisch. Sie unterscheiden sich nur hinsichtlich der Auswahl der Eigen- und Statikmoden in der Transformationsmatrix \mathbf{T} .

5 Die Eigen- und Statikmoden des Ritz-Ansatzes

Für kleine, linearisierbare Bewegungsvorgänge werden neben den Eigen- und Statikmoden zusätzlich Starrkörpermoden in die Transformationsmatrix einsortiert.

5.1 Starrkörpermoden

Die Matrix \mathbf{R}_j bildet den Starrkörperverschiebungszustand des Schwerpunktes auf den Starrkörperverschiebungszustand \mathbf{u}_j an einem Knoten j des FE-Modells ab:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix}_j = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix}_{S_p},$$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{Sp}. \quad (12)$$

Die Starrkörpermoden \mathbf{t}_1 bis \mathbf{t}_6 des FE-Modells ergeben sich, wenn die Vektoren \mathbf{u}_j als Systemverschiebungsvektor angeordnet werden.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j \\ \vdots \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{u}_{Sp}, \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \dots & \mathbf{t}_6 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{Sp}, \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{st} \end{bmatrix} \mathbf{q}_{st}. \end{aligned} \quad (13)$$

5.2 Statikmoden

Statikmoden sollen das elastische Verhalten der belasteten Substruktur beschreiben. Die Belastungen können Kräfte aus Verbindungselementen, Trägheitskräften oder äußeren Belastungen sein. Diese Zustände können auf unterschiedliche Art berechnet werden. Erstens können Zwangsbedingungen bzw. Einheitsverschiebungen vorgegeben werden. Zweitens können Einheitsbelastungen vorgegeben werden.

5.2.1 Statikmoden aus der Vorgabe von Einheitsverschiebungen

Einheitsverschiebungen werden an Koppelstellen und Einzelkraftangriffstellen vorgegeben. Die daraus resultierenden Statikmoden bzw. Verschiebungsvektoren des FE-Modells können aus der statischen Kondensation berechnet werden, wenn die Koppelfreiheitsgrade und die Freiheitsgrade der Einzelkraftangriffspunkte als Hauptfreiheitsgrade erhalten bleiben. Ein derartiger Statikmode ist in Bild 2 dargestellt. Wird die Steifigkeitsmatrix und der Systemverschiebungsvektor nach Haupt- und Nebenfreiheitsgraden sortiert

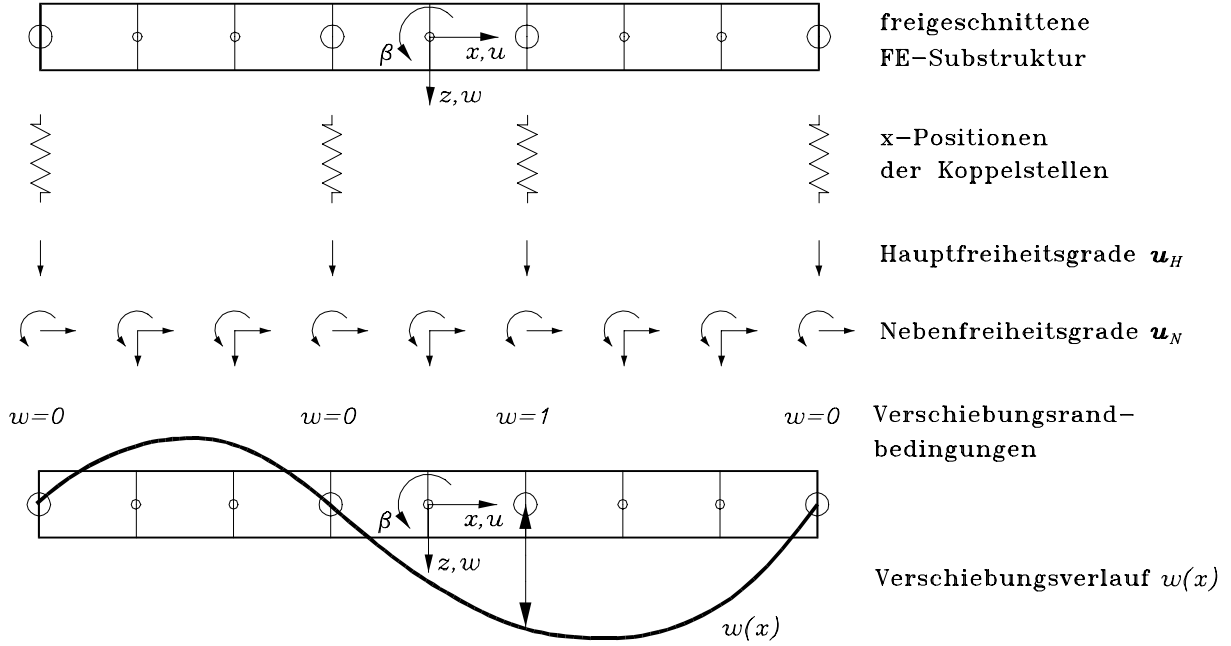


Bild 2: Definitionen für *constraint modes* (Formen aus Randbedingungen)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{HH} & \mathbf{S}_{HN} \\ \mathbf{S}_{NH} & \mathbf{S}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_H \\ \mathbf{u}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_H \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

so erhält man [2] aus der zweiten Zeile des Gleichungssystems (14) eine Beziehung zwischen den Haupt- und Nebenfreiheitsgraden (15). Faßt man Haupt- und Nebenfreiheitsgrade in einem Verschiebungsvektor zusammen, ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen den Hauptfreiheitsgraden und dem Systemverschiebungsvektor. Die Sortierung nach Haupt- und Nebenfreiheitsgraden muß natürlich rückgängig gemacht werden.

$$\mathbf{u}_N = -\mathbf{S}_{NN}^{-1} \mathbf{S}_{NH} \mathbf{u}_H, \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N \\ \mathbf{u}_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{NN}^{-1} \mathbf{S}_{NH} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}_H, \quad (16)$$

Sortierung rückgängig machen

$$\mathbf{u}_{stat,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{stat,c} \end{bmatrix} \mathbf{q}_{stat,c}. \quad (17)$$

Damit \mathbf{S}_{NN} invertierbar ist, muß die Sperrung der Hauptfreiheitsgrade mindestens eine statisch bestimmte Lagerung bewirken. Für die meisten Substrukturen in Fahrzeugmodellen wird diese Bedingung erfüllt sein. Die Verschiebungsvektoren aus statischer Kondensation werden im allgemeinen als *constraint modes* [8] (Formen aus Randbedingungen)

bezeichnet.

5.2.2 Statikmoden aus der Vorgabe von Einheitslasten

Für unverschieblich gelagerte Substrukturen werden die Verschiebungsvektoren in \mathbf{T}_{stat} durch Multiplikation der inversen Steifigkeitsmatrix mit Einheitslastvektoren \mathbf{p}_1 , die spaltenweise in \mathbf{P}_1 angeordnet sind, bestimmt. Die Einheitslasten werden an den Stellen aufgebracht wo Koppel – oder Einzelkräfte wirksam sind. Da alle übrigen Komponenten von \mathbf{p}_1 Null sind, werden nur die benötigten Spalten der inversen Steifigkeitsmatrix in die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{stat,a}$ einsortiert,

$$\mathbf{T}_{stat,a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}_1.$$

Die Verschiebungsvektoren aus der Vorgabe von Einheitslasten werden als *attachment modes* [8] (Formen aus Einzelkräften) bezeichnet.

Werden die Einheitsbelastungsvektoren in \mathbf{P}_1 an einer freien Substruktur aufgebracht, treten Starrkörperbewegungszustände \mathbf{t}_{st} auf, denen aufgrund der Trägheitskräfte aus der Starrkörperbewegung elastische Anteile $\mathbf{t}_{stat,a}$ überlagert sind. Die Starrkörperverschiebungsvektoren können mit Hilfe der linearen Abbildung (18) von den elastischen Anteilen abgezogen werden.

$$\mathbf{t}_{stat,a} = \mathbf{G} (\mathbf{t}_{st} + \mathbf{t}_{stat,a}) \quad (18)$$

Setzt man diese Verschiebungstransformation in das Prinzip der virtuellen Verrückungen ein, ergibt sich

$$\underbrace{\mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G}}_{\mathbf{S}^\circ} (\mathbf{t}_{st} + \mathbf{t}_{stat,a}) = \underbrace{\mathbf{G}^T \mathbf{p}_1}_{\mathbf{p}_g}, \quad (19)$$

eine transformierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{S}° , die invertierbar ist, da in ihr keine Starrkörperanteile mehr enthalten sind. Die transformierten Lastvektoren \mathbf{p}_g leisten an den Starrkörperverschiebungszuständen keine virtuelle Arbeit,

$$\mathbf{0} = \mathbf{T}_{st}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P}_1.$$

Sie stellen daher statische Eigenkraftgruppen dar. Die statischen Verschiebungszustände (20) ergeben sich aus Gleichung (19), wobei die Starrkörperverschiebungszustände bereits abgezogen wurden.

$$\mathbf{T}_{stat,a} = \mathbf{G} \mathbf{S}^{\circ-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_1 \quad (20)$$

Die globalen Verschiebungsvektoren werden [8] als *inertia relief attachment modes* (Formen aus Eigenkraftgruppen) bezeichnet.

Die Matrix \mathbf{G}^T bestimmt sich, indem die Starrkörperbewegungszustände infolge aller Einheitslastvektoren berechnet werden. Mit den zugehörigen Massenkraften können die Eigenkraftgruppen berechnet werden. Dazu werden zunächst die Starrkörperbewegungen bestimmt, die sich aus

$$\mathbf{u}_{st}'' = \mathbf{T}_{st}^T \mathbf{P}_1$$

ergeben, wenn die Starrkörperverschiebungsvektoren entsprechend,

$$\mathbf{T}_{st}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{st} = \mathbf{I},$$

normiert werden. Die Massenkräfte \mathbf{P}_m aus dem Starrkörperbewegungszustand

$$\mathbf{P}_m = -M \mathbf{T}_{st} \mathbf{T}_{st}^T \mathbf{P}_1$$

bilden zusammen mit \mathbf{P}_1 eine gleichgewichtige äußere Belastung \mathbf{P}_g .

$$\mathbf{P}_g = \underbrace{[\mathbf{I} \quad -M \mathbf{T}_{st} \mathbf{T}_{st}^T]}_{\mathbf{G}^T} \mathbf{P}_1$$

Bild 3 zeigt einen Verschiebungsverlauf infolge einer Einheitsbelastung an der Koppelstelle und den zugehörigen Massenkräften aus der Starrkörperbewegung.

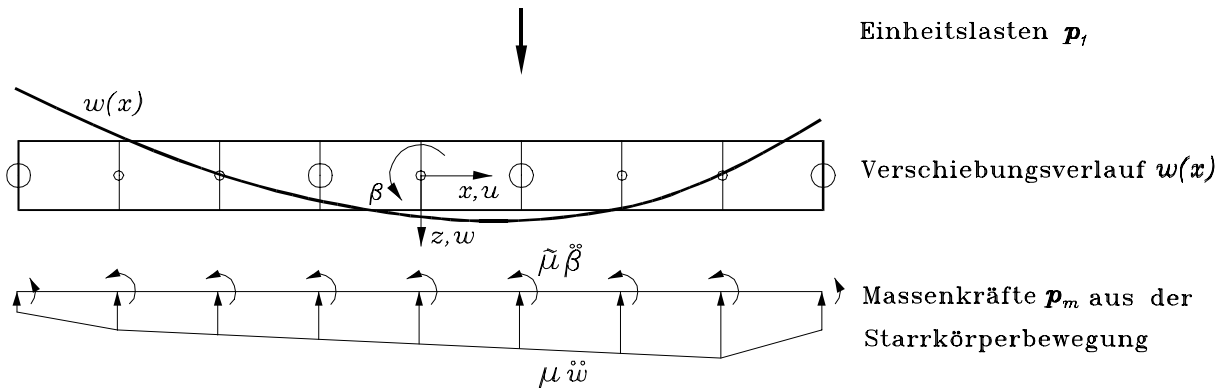


Bild 3: Eigenkraftgruppe für ein *attachment mode*

Bild 3 zeigt, daß Statikmoden, die entsprechend Gleichung 20 berechnet werden, neben den Koppelkräften auch die Auswirkungen der Trägheitskräfte aus der Starrkörperbewegung auf die elastischen Verschiebungen enthalten. Beim Reduktionsverfahren von Hurty (Abschnitt 6.4) werden nur die Koppelkräfte nicht aber die Trägheitskräfte aus der Starrkörperbewegung berücksichtigt.

Anstelle der numerisch aufwendigen Transformation der Systemsteifigkeitsmatrix kann die Substruktur statisch bestimmt gelagert werden, wobei die Fesselungen so anzubringen sind, daß sich die Schnittkraftzustände infolge der Gleichgewichtskraftgruppen \mathbf{P}_g genau wie am freien System einstellen. Die Fesselung darf keine Zwängungen im System hervorrufen [4].

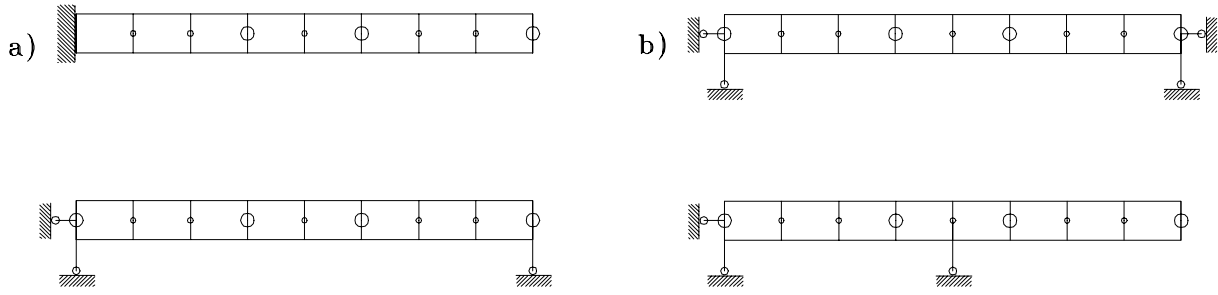


Bild 4: a) Zulässige und b) fehlerhafte Fesselungen der Substruktur

Am einfachsten ist es, sämtliche Freiheitsgrade an einer Koppelstelle zu sperren (Bild 4 a) oben).

5.3 Eigenmoden

Aus der Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems (21) erhält man die Eigenwerte und Eigenmoden des FE-Modells. Dabei kann das freie, das elastisch gefesselte–oder das starr gefesselte FE-Modell behandelt werden. Für die beiden letztgenannten Fälle werden die Freiheitsgrade des FE-Modells gefesselt, die an den Koppellementen des Fahrzeugmodells Arbeit leisten,

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{S}) \mathbf{t}_{mod} = \mathbf{0}. \quad (21)$$

In der Matrix \mathbf{T}_{mod} werden die Eigenmoden bzw. Eigenformen \mathbf{t}_{mod} einsortiert, die bei der Reduktion des FE-Modells berücksichtigt werden sollen:

$$\mathbf{u}_{mod} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{mod} \end{bmatrix} \mathbf{q}_{mod} = \begin{bmatrix} \dots \mathbf{t}_{mod} \dots \end{bmatrix} \mathbf{q}_{mod}. \quad (22)$$

5.4 Residuale Statikmoden

Statikmoden \mathbf{t}_{stat} lassen sich durch einen Ritz-Ansatz beschreiben, der alle Eigenmoden des freigeschnittenen FE-Modells enthält. Die in der Mehrkörpersimulation berücksichtigten Eigenmoden sind (Gleichung (23)) in der Matrix \mathbf{T}_{mod} , die vernachlässigten Eigenmoden in der Matrix $\mathbf{T}_{mod,r}$ zusammengefasst:

$$\mathbf{t}_{stat} = \mathbf{T}_{mod} \mathbf{q}_{mod} + \mathbf{T}_{mod,r} \mathbf{q}_{mod,r}, \quad (23)$$

$$\mathbf{t}_{stat} = \mathbf{T}_{mod} \mathbf{q}_{mod} + \mathbf{t}_{res}. \quad (24)$$

Jeder Statikmode \mathbf{t}_{stat} enthält demnach einen Anteil, der im Ritz-Ansatz berücksichtigten Eigenmoden \mathbf{T}_{mod} . Wird dieser Anteil von dem Statikmode abgezogen, erhält man einen residualen Statikmode \mathbf{t}_{res} (Gleichung (24)). Ein Vergleich der Gleichungen (23) und (24) zeigt, daß sich residuale Statikmoden irgendwie aus den vernachlässigten Eigenmoden $\mathbf{T}_{mod,r}$ zusammensetzen und daher orthogonal zu den berücksichtigten Eigenmoden sind. In den Bewegungsgleichungen sind dann Eigenmoden und residuale Statikmoden entkoppelt. Diese Orthogonalisierung ist nicht zwingend erforderlich, bringt aber Vorteile bei der Beurteilung der Simulationsergebnisse mit sich.

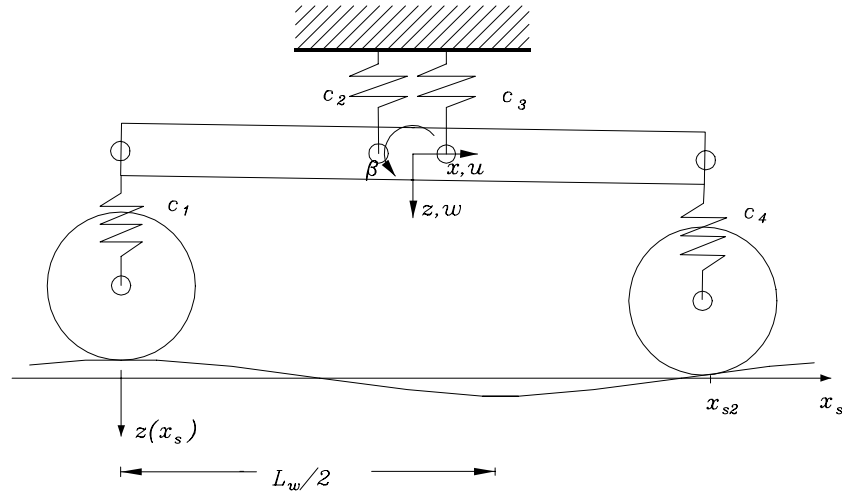


Bild 5: "Fahrzeugmodell"

6 Reduktion des FE-Modells und Ergebnisse

6.1 MKS-Modell

Mit den Eigen- und Statikmoden aus Abschnitt 5 sollen Reduktionsverfahren getestet werden. Ergebnisse werden für das in Bild 5 dargestellte Beispiel des Längsträgers gezeigt. Die Bewegungen des Wagenkastens werden zu Null gesetzt, weil hier nur das Verhalten des elastischen Längsträgers untersucht werden soll. Die Bewegungsgleichungen

$$M_{red} \mathbf{q}'' + [\mathbf{S}_{red} + \sum_{\text{alle Federn}} c_n \mathbf{T}_{j,n}^T \mathbf{K}_n \mathbf{T}_{j,n}] \mathbf{q} = \sum_{\text{Primärfedern}} c_n \mathbf{T}_{j,n}^T \mathbf{K}_n \mathbf{R}_{k,n} z(x_{sk})$$

$$z(x_s) = \hat{a} \cos\left(\frac{2\pi x_s}{L_w}\right)$$

enthalten dann nur noch die \mathbf{q} Freiheitsgrade des Längsträgers als Unbekannte. Auf der rechten Seite steht die Fußpunktsanregung aus den Bewegungen u_k des Radsatzes k , die an den Radaufstandspunkten x_k durch ein harmonisches Störprofil mit der Wellenlänge L_w vorgegeben sein sollen.

6.2 Anforderungen an die Reduktionsverfahren

Darstellung der elastischen Verschiebungen

Die Kopplung von MKS und FE-Programmen erfordert ein Reduktionsverfahren, bei dem zumindest keine wichtigen Informationen über die elastischen Verschiebungen verlorengehen. Die Kräfte in den Koppellementen könnten dann über deren Kraftgesetze bestimmt werden. Aus den Kräften in den Koppellementen und dem Bewegungszustand werden dann, im Anschluß an die MKS-Rechnung, Eingabe - bzw. Belastungsgrößen für eine FE-Spannungsberechnung am vollständigen FE-Modell aufbereitet.

Darstellung der elastischen Verschiebungen und der Schnittkraftgrößen

Sofern aber die Möglichkeit besteht, mit einem reduzierten FE-Modell nicht nur die elastischen Verschiebungen, sondern auch alle Schnittkraftgrößen korrekt, im Sinne des vollständigen FE-Modells, zu beschreiben, dann ist eine Berechnung der Schnittkraftgrößen aus dem Ritz-Ansatz sinnvoll. Liegen die Unbekannten \mathbf{q} des reduzierten FE-Modells beispielsweise als Funktionen der Zeit vor, ergibt sich der Randschnittkraftvektor \mathbf{s} an einem beliebigen Element (Index e) aus Gleichung (25),

$$\mathbf{s}_e(t) = \mathbf{S}_e \mathbf{T}_e \mathbf{q}(t) + \mathbf{M}_e \mathbf{T}_e \mathbf{q}(t)'' \quad (25)$$

mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{T}_e \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Die reduzierte Transformationsmatrix \mathbf{T}_e enthält die Zeilen der vollständigen Transformationsmatrix, die den Elementfreiheitsgraden zugeordnet sind. Damit können während der MKS-Rechnung, mit einem geringen numerischen Aufwand, Zeitschriebe oder statistische Größen von Schnittkräften oder Spannungen an kritischen Stellen der Konstruktion berechnet werden. Wird die Substruktur mit flächen- oder volumenhaften finiten Elementen modelliert, wird noch eine Zwischentransformation der Knotenschnittkraftgrößen auf die Randschnittkraftgrößen nötig.

In den nachfolgend dargestellten Ergebnissen wurden die Verschiebungs- und Schnittkraftgrößen entsprechend Gleichung (25) berechnet.

6.3 Reduktion mit den Eigenmoden des freien FE-Modells

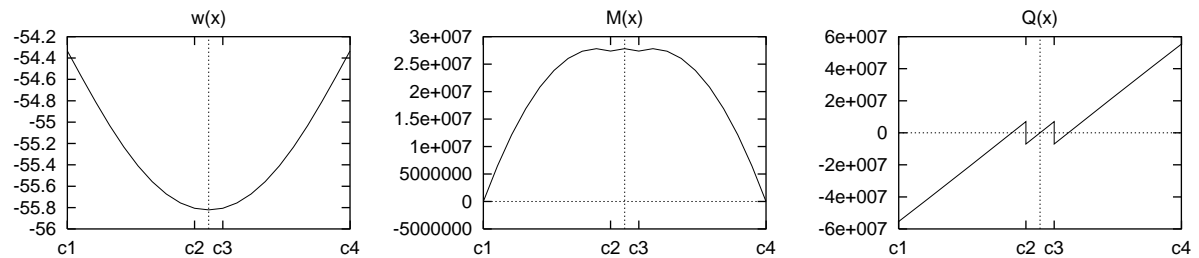
Im folgenden wird die Anzahl der Eigenmoden variiert, die im Ritz-Ansatz verwendet wird (42, 40 und 7 Eigenmoden). Die Starrkörpermoden $\mathbf{t}_{mod,1}$ und $\mathbf{t}_{mod,2}$ werden in jedem Fall berücksichtigt:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{mod} = \left[\underbrace{\mathbf{t}_{mod,1}, \mathbf{t}_{mod,2}}_{\text{Starrkörpermoden}} \mid \underbrace{\mathbf{t}_{mod,3}, \dots}_{\text{elastische Eigenmoden}} \right].$$

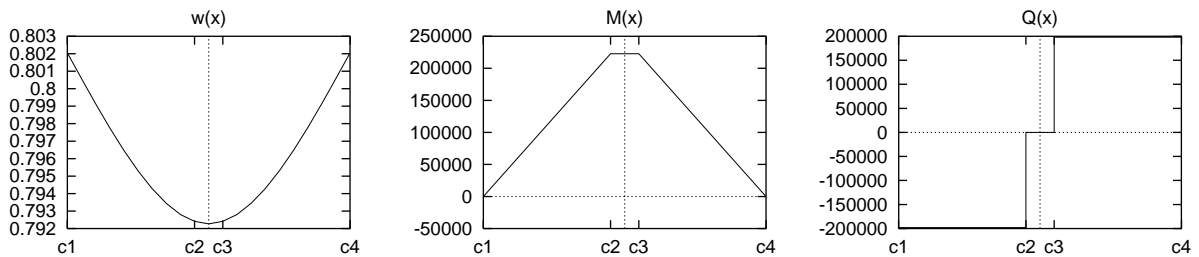
Zuerst wird ein Ritz-Ansatz betrachtet, der nur Eigenmoden des freien Systems und keine Statikmoden enthält, bei dem also die Wechselwirkungen zwischen den elastischen Deformationen der Substruktur und den Belastungen, die das Mehrkörpersystem auf die Substruktur ausübt, vernachlässigt werden. Nur im Grenzfall, d.h. wenn alle Eigenmoden im Ritz-Ansatz berücksichtigt werden, läßt sich eine Spannungs- bzw. Schnittkraftberechnung aus dem Ritz-Ansatz durchführen. Der Längsträger wurde mit 20 schubstarren Balkenelementen modelliert, so daß zum vollständigen Ritz-Ansatz 42 Eigenformen gehören. Für die Rechnung wurde eine Profilstörung mit einer Wellenlänge zugrundegelegt, die gleich dem Radstand ist und daher den Längsträger zu einer Tauchbewegung anregt. Die Amplitude der Profilstörung beträgt 1 m. Für die Taucheigenfrequenz, die bei $\Omega=122.0$ Hz liegt, ist die Lösung für die Verschiebungen $w(x)$, das Biegemoment $M(x)$ und die Querkraft $Q(x)$ des vollständig modal entkoppelten Systems in dem obersten Teil von Bild 6 dargestellt.

Der statische Fall wurde für eine Anregungsfrequenz von $\Omega=0.001$ Hz untersucht. Die zugehörigen Lösungen sind ebenfalls in Bild 6 dargestellt. Bereits die Näherungslösung für die Querkraft bei 40 Eigenformen zeigt erhebliche Abweichungen von der Vergleichslösung, während sich für die Querkraft bei 7 Eigenformen völlig falsche Werte ergeben.

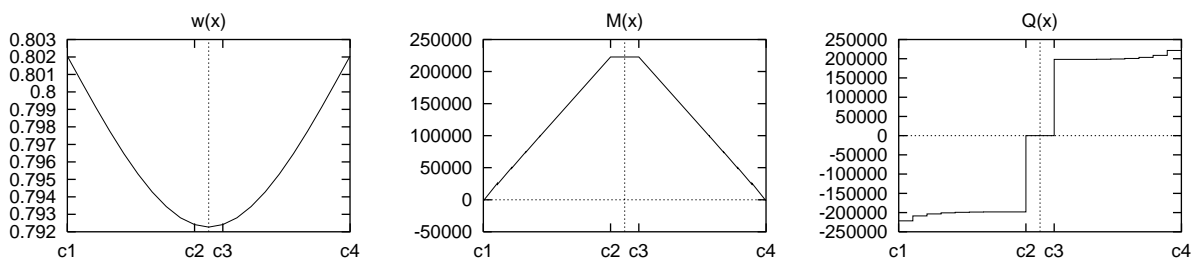
$\Omega = 122.0$ Hz (Tauchen des Längsträgers), 42 von 42 Eigenmoden (Vergleichslösung)



$\Omega = 0.001$ Hz (statische Lösung), 42 von 42 Eigenmoden (Vergleichslösung)



$\Omega = 0.001$ Hz, 40 von 42 Eigenmoden



$\Omega = 0.001$ Hz, 7 von 42 Eigenmoden

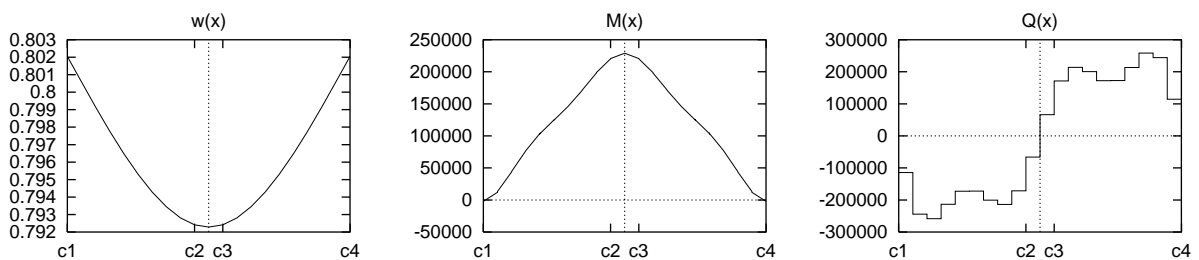


Bild 6: Verschiebung $w(x)$, Biegemoment $M(x)$ und Querkraft $Q(x)$ für das modal entkoppelte FE-Modell des Längsträgers. Die x-Koordinaten der Koppelstellen sind mit c_1 , c_2 , c_3 und c_4 gekennzeichnet

Im Gegensatz dazu sind die Verschiebungsverläufe bei allen drei untersuchten, statischen Fällen praktisch gleich, so daß eine Berechnung der Anschlußkräfte aus den Kraftgesetzen der Verbindungselemente des Mehrkörpermodells etwa die gleichen, richtigen Werte liefert. Aus einer modalen Reduktion mit den Eigenformen des freien Systems ergibt sich eine Verletzung des Gleichgewichtes zwischen den Kräften in den Verbindungselementen und den Schnittkraftgrößen an den Koppelstellen der Substruktur. Eine Spannungsberechnung aus dem Ritz-Ansatz ist bei Verwendung von Eigenmoden des freien Systems nicht möglich.

6.4 Reduktion mit den Eigenmoden des gefesselten FE-Modells und Statikmoden aus statischer Kondensation

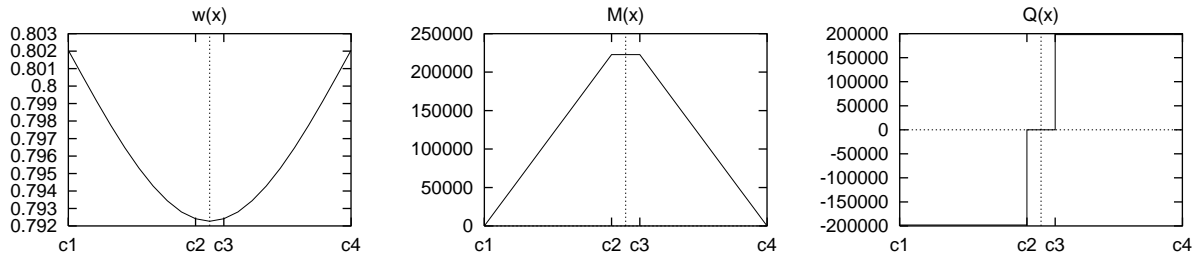
Durch Berücksichtigung von Formen aus Randbedingungen soll die Statik korrekt dargestellt werden. Für die Beispielrechnungen werden keine Starrkörperverschiebungsvektoren im Ritz-Ansatz verwendet, da sie in den Formen aus Randbedingungen enthalten sind. Die Anzahl der zu berücksichtigenden Formen aus Randbedingungen entspricht der Anzahl der Koppelfreiheitsgrade, also vier für das vorliegende Beispiel $\mathbf{t}_{stat,c,1}$ bis $\mathbf{t}_{stat,c,4}$. Zusätzlich werden Eigenmoden berücksichtigt. Die Substruktur wird dazu an den Koppelstellen gefesselt, so daß bei der Modalanalyse keine Starrkörperverschiebungsvektoren auftreten. Es ergibt sich für die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \left[\underbrace{\mathbf{t}_{stat,c,1}, \dots, \mathbf{t}_{stat,c,4}}_{\text{Statikmoden}} \mid \underbrace{\mathbf{t}_{mod,1}, \dots}_{\text{Eigenmoden}} \right].$$

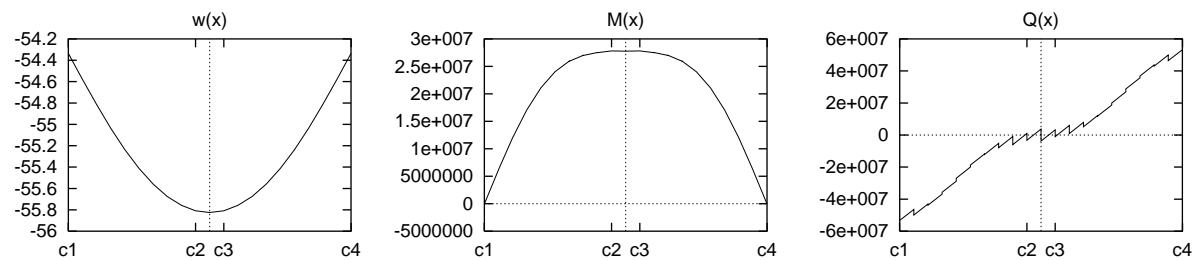
In den Beispielrechnungen wurde zunächst eine elastische Eigenform berücksichtigt. Die Ergebnisse sind in Bild 7 aufgetragen. Im obersten Teil ist die zugehörige statische Lösung dargestellt, die mit der entsprechenden Vergleichslösung aus Bild 6 exakt übereinstimmt. Die Forderung nach einer korrekten Darstellung der Schnittkräfte im statischen Fall läßt sich mit diesem Vorgehen einhalten.

Bei dynamischer Belastung ($\Omega=122.0$ Hz) ist die Lösung für die Querkräfte nicht akzeptabel, weil die Formen aus Randbedingungen die Auswirkungen der Trägheitskräfte aus der Starrkörperbewegung auf die elastischen Verformungen nicht enthalten. Diese können nur dann näherungsweise dargestellt werden, wenn weitere Eigenformen im Ritz-Ansatz berücksichtigt werden. Erst die Berücksichtigung von etwa 13 Eigenformen ergibt eine akzeptable Lösung für die Querkraft. In der Transformationsmatrix stehen dann 17 Spalten. Die Einsparung an Freiheitsgraden ist also gering, wenn die Schnittkräfte bei dynamischer Belastung korrekt dargestellt werden sollen.

$\Omega = 0.001$ Hz, 4 Statikmoden aus Randbedingungen, 1 Eigenmode



$\Omega = 122.0$ Hz, 4 Statikmoden aus Randbedingungen, 1 Eigenmode



$\Omega = 122.0$ Hz, 4 Statikmoden aus Randbedingungen, 13 Eigenmoden

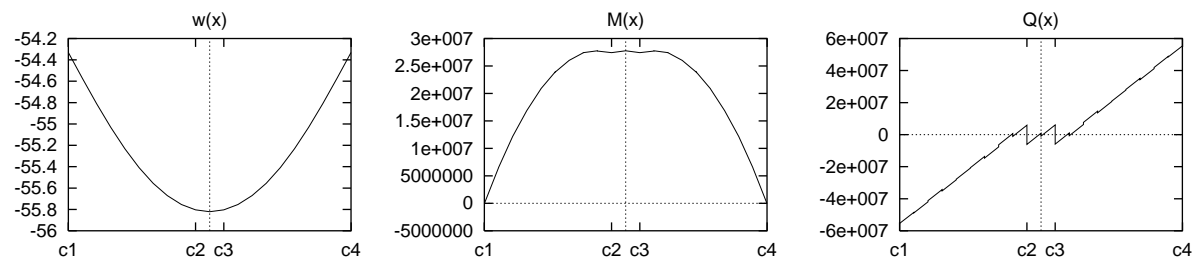


Bild 7: Verschiebung $w(x)$, Biegemoment $M(x)$ und Querkraft $Q(x)$ bei Verwendung von Eigenmoden des gelagerten FE-Modells und Formen aus Randbedingungen

Das beschriebene Verfahren eignet sich zur Behandlung von relativ steif gelagerten Substrukturen wie z.B. die Welle einer Turbine, weil dort die Starrkörperbewegungen vernachlässigbar klein sind und die zur Reduktion verwendeten unteren Eigenmoden des starr gelagerten Systems relativ gut mit denen tatsächlichen auftretenden Eigenmoden übereinstimmen.

6.5 Reduktion mit den Eigenmoden des elastisch gefesselten FE-Modells und residualen Statikmoden

Die Berücksichtigung der elastischen Fesselung des Längsträgers bei der Berechnung der Moden im FE-Programm ermöglicht es, die Lösung für die Schnittkraftgrößen bei dynamischer Belastung mit einer geringen Anzahl von Eigenmoden \mathbf{t}_{mod} für den Anregungsfrequenzbereich korrekt darzustellen, weil die Eigenmoden des elastisch gefesselten Systems (Bild 8) Starrkörperanteile und damit auch den Einfluß von Massenkräften aus der Starrkörperbewegung enthalten. Die Lösung wird für statische Belastung durch die Verwendung von Residualverschiebungsansätzen $\mathbf{t}_{res,c}$ korrekt dargestellt. Die Starrkörperverschiebungen sind sowohl den elastischen Eigenmoden, als auch den Residualverschiebungsansätzen überlagert. Sie müssen daher bei diesem Vorgehen nicht zusätzlich in der Transformationsmatrix berücksichtigt werden. Sie hat für das vorliegende Beispiel die Gestalt

$$\mathbf{T} = \left[\underbrace{\mathbf{t}_{res,c,1}, \dots, \mathbf{t}_{res,c,4}}_{\text{Statikmoden}} \mid \underbrace{\mathbf{t}_{mod,1}, \dots}_{\text{Eigenmoden}} \right].$$

Bei der Reduktion der Matrizen des elastisch gefesselten FE-Modells mit den zugehörigen

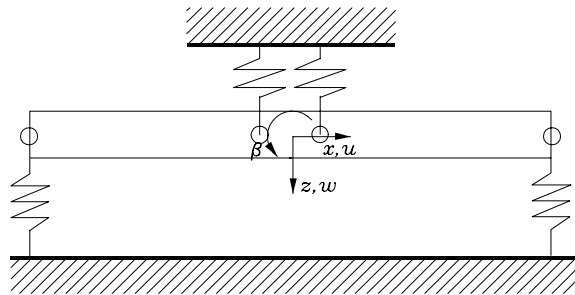


Bild 8: Elastisch gefesselter Längsträger

gen Eigenmoden erhält man reduzierte Matrizen zum Einbau in das MKS, die bereits den Steifigkeitsanteil der Verbindungselemente enthalten. Die Steifigkeitsanteile der Verbindungselemente würden in das Mehrkörper-Fahrzeugmodell doppelt eingebaut werden. Um dieses zu umgehen, werden die Eigenformen des elastisch gefesselten FE-Modells berechnet, in die Transformationsmatrix einsortiert und mit dieser Transformationsmatrix werden die Matrizen des freien FE-Modells reduziert.

Nachfolgend wird gezeigt, daß dieses Vorgehen zulässig ist. Die Steifigkeitsmatrix des elastisch gefesselten Systems ist die Summe aus der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} des freien Systems und Matrizen mit den Federanteilen $c_n \mathbf{K}_n$.

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{T}^T \left[\mathbf{S} + \sum_n \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & c_n \mathbf{K}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \right] \mathbf{T} \quad (26)$$

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{T}^T \left[\mathbf{S} + \sum_n \mathbf{C}_n \right] \mathbf{T} \quad (27)$$

Die Reduktion kann für die Steifigkeitsmatrix des freien Systems und die Lagerungsmatrizen \mathbf{C}_n getrennt vorgenommen werden. Die Lagerungsmatrizen sind nur auf den Spalten und Zeilen besetzt, die den Koppelfreiheitsgraden zugeordnet sind. Alle übrigen Elemente sind Null. Dadurch werden bei der Transformation auch nur die entsprechenden Zeilen der Transformationsmatrix \mathbf{T} angesprochen:

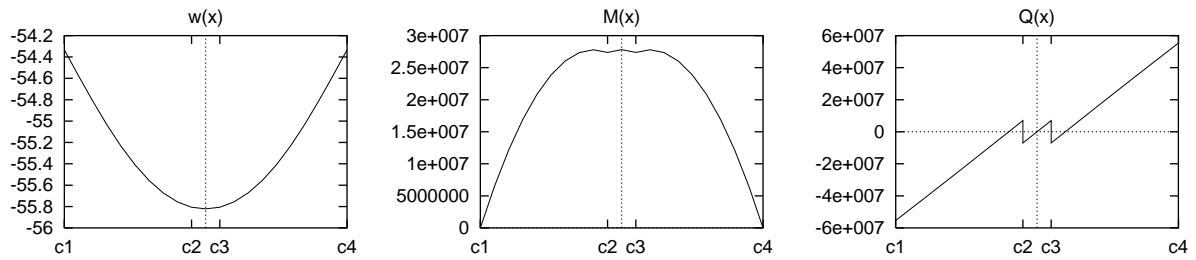
$$\mathbf{S}_{c_n} = \mathbf{T}^T \mathbf{C}_n \mathbf{T}, \quad (28)$$

$$\mathbf{S}_{c_n} = \mathbf{T}_{j,n}^T c_n \mathbf{K}_n \mathbf{T}_{j,n}. \quad (29)$$

Die reduzierten Lagerungsmatrizen \mathbf{S}_{c_n} sind mit den Matrizen des MKS-Algorithmus identisch, die der ungefesselten, elastischen Substruktur zur Kopplung mit anderen Körpern beim Aufbau des Mehrkörper-Fahrzeugmodells hinzugefügt werden.

Die Ergebnisse sind in Bild 9 dargestellt. Es wurden vier statische Verschiebungsvektoren und eine Eigenform des elastisch gefesselten Systems zur Reduktion verwendet.

$\Omega = 122.0$ Hz, 4 residuale Statikmoden aus Randbedingungen, 1 Eigenmode



$\Omega = 0.001$ Hz, 4 residuale Statikmoden aus Randbedingungen, 1 Eigenmode

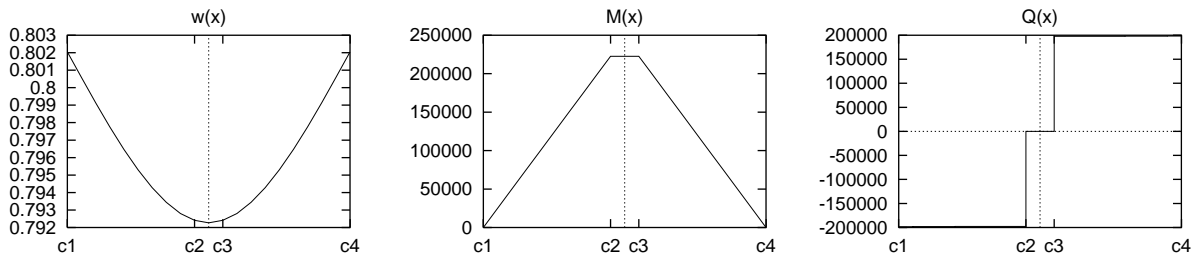


Bild 9: Verschiebung $w(x)$, Biegemoment $M(x)$ und Querkraft $Q(x)$ bei Verwendung von elastischen Eigenformen des elastisch gefesselten FE-Modells und residualen Formen aus Randbedingungen

Ergebnisse sind für statische Belastung und eine Anregungsfrequenz nahe der Tauchfrequenz dargestellt. Für alle Anregungsfrequenzen zwischen 0 und 122 Hz liefert das reduzierte System Werte, die mit der Vergleichslösung praktisch gleich sind. Erst für Anregungsfrequenzen oberhalb von 122 Hz weicht die Lösung des reduzierten Systems von der Vergleichslösung ab. Durch Berücksichtigung des nächsthöheren Eigenmodes ist die Lösung bis zur nächsten Eigenfrequenz korrekt. Die Anzahl der Eigenmoden im Ritz-Ansatz ist mit der Anzahl der Eigenmoden im Anregungsfrequenzbereich gleich.

Die Verwendung von Eigenmoden des elastisch gefesselten Systems und residuale Formen aus Randbedingungen ermöglicht bei korrekter Darstellung der Schnittkraftgrößen die größte Einsparung an Freiheitsgraden, weil keine Starrkörperverschiebungszustände in die Transformationsmatrix einsortiert werden müssen.

Ein Problem stellt jedoch die Berücksichtigung von Verbindungselementdaten bei der Berechnung der Eigenmoden dar. Zum einen würde die Organisation der Kopplung von FE- und MKS-Programmen erschwert werden, zum anderen müßte die Berechnung für jede neue Kombination von Verbindungselementen (z.B.: Änderung der Federsteifigkeiten von Primär- und Sekundärfederung) neu erfolgen. Außerdem ist dieses Vorgehen auf lineare FE und MKS-Modelle beschränkt.

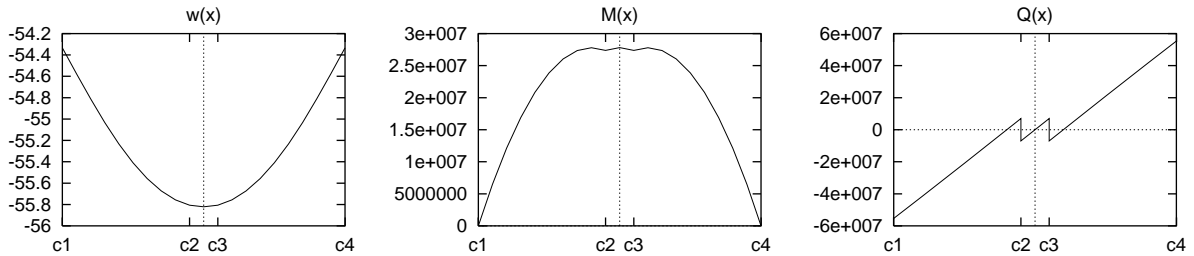
6.6 Reduktion mit den Eigenmoden des freien Systems und residualen Statikmoden

Die Verwendung von Eigenmoden des freien Systems hat den Vorteil, daß bei der Vorbehandlung elastischer Substrukturen im FE-Programm keine Daten des übrigen Fahrzeugmodells benötigt werden. Der Einbau von nichtlinearen Verbindungselementen im MKS-Programm bereitet daher keine Schwierigkeiten. Die Statikmoden müssen den Einfluß der Massenkräfte aus der Starrkörperbewegung enthalten, was in 6.4 gezeigt wurde, und von den residualen Formen aus Eigenkraftgruppen geleistet wird. Da weder in den Residualverschiebungsvektoren, noch in den Eigenformen Starrkörperanteile enthalten sind, müssen zusätzlich Starrkörperverschiebungsvektoren in die Transformationsmatrix einsortiert werden. Die Transformationsmatrix hat dann die Gestalt

$$T = \left[\underbrace{t_{st,1}, t_{st,2}}_{\text{Starrkörpermoden}} \mid \underbrace{t_{res,a,1}, \dots, t_{res,a,4}}_{\text{Statikmoden}} \mid \underbrace{t_{mod,1}, \dots}_{\text{Eigenmoden}} \right].$$

In den Beispielrechnungen wurde eine elastische Eigenform berücksichtigt. Daraus folgen 7 Unbekannte für das reduzierte FE-Modell. Die Ergebnisse in Bild 10 stimmen auch hier mit der Vergleichslösung überein.

$\Omega = 122.0$ Hz, 2 Starrkörpermoden, 4 residuale Statikmoden, 1 Eigenmode



$\Omega = 0.001$ Hz, 2 Starrkörpermoden, 4 residuale Statikmoden, 1 Eigenmode

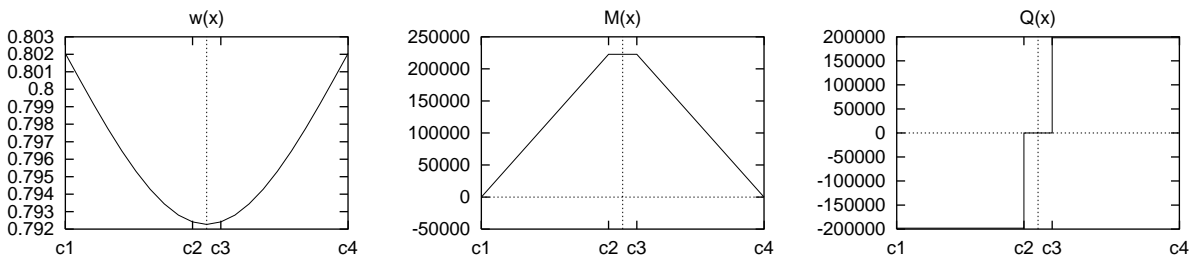


Bild 10: Verschiebung $w(x)$, Biegemoment $M(x)$ und Querkraft $Q(x)$ bei Verwendung von elastischen Eigenformen des freien FE-Modells, residuale Formen aus Randbedingungen und Starrkörpervektoren

Darüber hinaus bietet sich die Möglichkeit einer einheitlichen Vorgehensweise für ungefesselte und gefesselte Substrukturen, da auch bei Verwendung praktisch starrer Verbindungen

dungselemente die richtige Lösung für Verschiebungs- und Schnittkraftzustände aus dem reduzierten FE-Modell berechnet werden kann.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Der beste Kompromiß zwischen Einsparung von Freiheitsgraden und der Organisation gekoppelter FE-MKS-Rechnungen ergibt sich bei Verwendung von Eigenformen des freien Systems in Verbindung mit residualen Formen aus Eigenkraftgruppen. Die Gründe hierfür sind :

- Aus dem Verschiebungsansatz und den elastischen Unbekannten lassen sich Verschiebungs- und Schnittkraftgrößen berechnen, die mit dem vollständigen FE-Modell übereinstimmen.
- Für Vorabberechnungen im FE-Programm werden nur Substrukturdaten, d.h. keine Daten des Mehrkörper-Fahrzeugmodells, benötigt.
- Fahrzeugmodelle dürfen nichtlineare Verbindungselemente aufweisen.
- Es können auch gedämpfte FE-Strukturen behandelt werden.
- Bei einer Substruktur mit vielen Koppelstellen (Drehgestellrahmen) müssen sehr viele Statikmoden berücksichtigt werden. Um die Zahl der Unbekannten weiter zu reduzieren, können Kraftgruppen für die Koppelkräfte definiert werden. Bei Formen aus Randbedingungen ist dies nicht möglich.
- Sicher ist die Reduktion von 42 auf 7 Freiheitsgrade nicht sehr beeindruckend. Die Anzahl der Freiheitsgrade r des reduzierten FE-Modells ist aber unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade des FE-Modells m . Die Anzahl der Freiheitsgrade des reduzierten FE-Modells r ist abhängig von der Anzahl der Koppelfreiheitsgrade s und der Anzahl der Eigenmoden e im Anregungsfrequenzbereich.

$$r = s + e$$

Im untersuchten Beispiel kommen noch die beiden Starrkörperfreiheitsgrade hinzu.

Allerdings sind noch folgende Punkte zu bearbeiten :

- Die Berücksichtigung großer Starrkörperbewegungen und geometrischer Nichtlinearitäten führt zu zustandsabhängigen Systemmatrizen. Das oben dargestellte Reduktionsverfahren muß für solche Fälle erweitert werden.
- Bei einigen Mehrkörpersystemen können geometrische Randbedingungen auftreten, die im Ritz-Ansatz durch homogene Randbedingungen erfaßt werden müssen. Bei dem vorgestellten Verfahren werden die Moden des Ritz-Ansatzes an der freigeschnittenen Substruktur berechnet. Homogene Randbedingungen werden dann im allgemeinen nicht eingehalten.

Literatur

- [1] Bauer, H.: *Zwischentransformation von Finite-Element-Systemmatrizen für Mehrkörpersysteme*, Interner Bericht IB 515-85/1 des DVFLR-Institutes für Flugsysteme, 1985.
- [2] Gasch, R., Knothe, K.: *Strukturtechnik Band 1: Diskrete Systeme*, Springer, 1989.
- [3] Gasch, R., Knothe, K.: *Strukturtechnik Band 2: Kontinua und ihre Diskretisierung*, Springer, 1989.
- [4] Kim Sung-Soo, Haug Edward J.: *Selection of Deformation Modes for Flexible Multibody Dynamics*, Mechanics of Structures & Machines, 18(4), 565-586, 1990.
- [5] Meirovitch L., Kwak M. K.: *Convergence of the Classical Rayleigh-Ritz Method and the Finite Element Method*, AIAA Journal, Vol.28, No 8,1509-1516, August 1990.
- [6] Wallrapp, O.: *Standardization of Flexible Body Modeling in Multibody System Codes, Part 1: Definition of Standard Input Data*, Mechanics of Structures & Machines, 22(3), 283-304, 1994.
- [7] Wallrapp O., Sachau D.: *Space Flight Dynamic Simulations Using Finite Element Analysis Results in Multibody System Codes*, Second International Conference of Computational Structures Technology, Athens, Greece, 30.8-1.9 1994.
- [8] Yoo Wan S., Haug Edward J.: *Dynamics of Articulated Structures, Part I. Theory*, J. Struct. Mech., 14(1), 105-126, 1986

A Daten des Fahrzeugmodells und der Rechnung

Einheiten : Kg, m, s	
Federsteifigkeiten	
Primär	1.00E+06
Sekundär	0.25E+06
Geometrie des Längsträgers	
Querschnittsbreite (Kastenquerschnitt) b	0.240
Querschnittshöhe h	0.200
Wandstärke t	0.012
Materialdaten	
E-Modul (Stahl)	2.1E+11
Dichte	6.8E+03
Anregung	
Amplitude	1
Wellenlänge	2.5

