ZUR LINEARISIERUNG DER BERÜHRGEOMETRIE

Oberbaurath Klingel aus Karlsruhe, dessen Vornamen wir nicht kennen, veröffentlichte im Jahre 1883 im *„Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens in technischer Beziehung“* unter dem Titel *„Ueber den Lauf der Eisenbahnwagen auf gerader Bahn“* seine Formel für die Wellenlänge der sogenannten Sinuslaufbewegung mit den Worten:

Ferner ist die Länge einer ganzen Schlangenwindung: $l = 2\pi\sqrt{\frac{re}{2\gamma}}$

Nun ist jedoch bei realen Profilpaarungen die mit γ bezeichnete *„Conicität der Reife“* gemeinhin nicht konstant. Möchte man dennoch bei der Auslegung von Schienenfahrzeugen auf lineare Rechenverfahren zurückgreifen, so ist *Klingel's* Gleichung zur Berechnung der Konizität eines äquivalenten Radsatz-Kegelprofils hilfreich.

Dr. Lutz Mauer, INTEC GmbH

Ausgangspunkt zur Linearisierung der Berührgeometrie ist in allen Fällen die Differentialgleichung des kinematischen Wellenlaufs des Radsatzes im Gleis:

$$y'' + f(y) = 0$$

Die nichtlineare Rückstellfunktion $f(y)$ resultiert aus der Funktion der Rollradienänderung $\Delta r(y)$ am Radreifenprofil, der Funktion des mittleren Rollradius $\bar{r}(y)$ sowie des Abstandes $e(y)$ der Radaufstandspunkte in Abhängigkeit der Querverschiebung y des Radsatzes,

$$f(y) = \frac{\Delta r(y)}{\bar{r}(y)e(y)}$$

wobei die Funktionen aus Differenzen bzw. Summen der geometrischen Parameter am rechten bzw. linken Rad gebildet werden. Für die Summenwerte werden häufig vereinfachend konstante Werte gesetzt:

$$\Delta r(y) = r_r(y) - r_l(y)$$
$$\bar{r}(y) = \tfrac{1}{2}\big(r_r(y) + r_l(y)\big) \approx r_0$$
$$e(y) = e_r(y) + e_l(y) \approx 2e_0$$

Zur Linearisierung der Berührgeometrie von Rad und Schiene sind verschiedene Verfahren gebräuchlich. Hier sollen die beiden wichtigsten Verfahren am Beispiel folgender analytisch gegebenen punktsymmetrischer Funktion gegenüber gestellt werden:

$$f(y) = k\,y + k^* y^3$$

Die harmonische Linearisierung

Ziel der Linearisierung ist es, für die nichtlineare Funktion $f(y)$ eine lineare Approximationsfunktion $ay + b$ zu finden, so daß der Erwartungswert des quadratischen Fehlers $E(\varepsilon^2)$ zwischen der nichtlinearen Funktion und der gesuchten linearen Näherung

$$E(\varepsilon^2) = E\Big(\big(f(y) - ay - b\big)^2\Big)$$

ein Minimum annimmt, was als Extremwertaufgabe zur folgenden Bedingungen führt:

$$\frac{\partial}{\partial a}E(\varepsilon^2) = aE(y^2) + bE(y) - E\big(yf(y)\big) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}E(\varepsilon^2) = aE(y) + b - E\big(f(y)\big) = 0$$

Unter der Voraussetzung einer punktsymmetrischen Funktion $f(y)$ verschwindet der Gleichanteil b, womit sich die Auflösung nach a wie folgt vereinfacht:

$$a = \frac{E\big(y\,f(y)\big)}{E(y^2)}$$

Die ***harmonische Linearisierung*** verwendet den einharmonischen Ansatz $y = A \sin\varphi$ für den Verlauf der unabhängigen Variable y. Die benötigten Erwartungswerte zur Bestimmung von a werden mittels Integration über eine Periode gewonnen. Nach Einsetzen der Lösung des Nennerintegrals bleibt folgende Beziehung zur Bestimmung des Linearkoeffizienten a auszuwerten:

$$a(A) = \frac{1}{\pi A}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi\; f(A\sin\varphi)\,d\varphi$$

Da der Linearterm a von der Linearisierungsamplitude A abhängig ist, wird $a(A)$ Beschreibungsfunktion genannt.

Nach Einsetzen unseres kubischen Polynoms erhalten wir folgende Beschreibungsfunktion für den Linearparameter:

$$a(A) = k + \tfrac{3}{4}k^* A^2$$

Die äquivalente Linearisierung

Im Gegensatz zur harmonischen Linearisierung, wo eine nichtlineare Funktion durch eine amplidudenabhängige Linearapproximation ersetzt wird, verwendet die Methode der äquivalenten Linearisierung die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung zur Bestimmung der Parameter eines linearen Ersatzsystems, das ein äquivalentes Lösungsverhalten zeigen soll.

Diese Vorgehensweise können wir für unsere Aufgabenstellung wie folgt veranschaulichen: Der freie Radsatz wird mit einer Anfangsauslenkung A auf das Gleis gesetzt und kinematisch abrollen lassen, bis er genau eine komplette Wellenbewegung durchgeführt hat. Die zugehörige Wellenlänge l wird in Klingels Gleichung eingesetzt, die nach der Konizität γ aufgelöst wird, die nun zur Unterscheidung von kegeligen Laufflächenprofilen mit γ_e bezeichnet wird ($2e_0 = e$):

$$\gamma_e = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 e_0 r_0$$

Das Problem der äquivalenten Linearisierung können wir also auf die Berechnung der Periodendauer l zurückführen. Diese Aufgabe kann für die kubische Rückstellungsfunktion noch analytisch gelöst werden, wie im Buch *Schwingungen* von *K. MAGNUS* zu lesen ist:

Wir multiplizieren die nichtlineare Differentialgleichung mit y' und integrieren einmal nach der unabhängigen Variablen x und erhalten die Gleichung der Gesamtenergie $E_0 = E_{kin} + E_{pot}$ des Schwingers. Die Auflösung nach y' liefert unmittelbar die Gleichung des Phasenportraits. Liegen geschlossene Phasenkurven vor, kann die Periodendauer mittels Integration über y bestimmt werden.
Bei Vorliegen einer symmetrischen Funktion des Rückstellungspotentials genügt bereits die Integration über eine Viertelperiode von $y' = y'(y)$ zur Darstellung der Periodenlänge $l(A)$:

$$l(A) = 4\int_0^A \frac{dy}{\sqrt{2(E_0 - E_{pot}(y))}}$$

Die potentielle Energie E_{pot} ergibt sich aus der Integration der nichtlineare Funktion der Rückstellung $f(y)$ über y:

$$E_{pot}(y) = \int_0^y f(\xi)d\xi$$

Für unser Beispiel der kubischen Rückstellungsfunktion erhalten wir nach Durchführung der Integration:

$$E_{pot}(y) = \tfrac{1}{2}ky^2 + \tfrac{1}{4}k^* y^4$$

Zur Bestimmung der Gesamtenergie E_0 setzen wir einfach die Amplitude A in die Potentialfunktion ein. Somit ergibt sich zur Berechnung der Periodenlänge der Wellenbewegung folgendes elliptisches Integral erster Gattung:

$$l(A) = 4\int_0^A \frac{dy}{\sqrt{k(A^2 - y^2) + \frac{1}{2}k^*(A^4 - y^4)}}$$

Die Lösung dieses Integrals schreiben wir aus einem verblichenen Script von *P. C. MÜLLER* ab. Zur kompakten Darstellung führen wir jedoch eine Hilfsgröße c ein:

$$c = \frac{k^*}{k}A^2$$

und erhalten *„mit Hilfe des vollständigen elliptischen Integrals 1. Gattung* $\mathsf{K}(\varphi)$ *bei* $k > 0$ *und*

α) $k^* < 0$ (unterproportionale Rückstellung)

$$l(A) = \frac{4}{\sqrt{k}\sqrt{1+\frac{1}{2}c}}\mathsf{K}(\varphi) \quad mit \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{-c}{2+c}}$$

β) $k^* = 0$ (lineare Rückstellung)

$$l(A) = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

γ) $k^* > 0$ (überproportionale Rückstellung)

$$l(A) = \frac{4}{\sqrt{k}\sqrt{1+c}}\mathsf{K}(\varphi) \quad mit \quad \tan\varphi = \sqrt{\frac{c}{2+c}}$$

Eine Reihenentwicklung der Beziehungen führt für kleine Amplituden A auf":

$$l(A) = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\left(1 - \tfrac{3}{8}c + \tfrac{57}{256}c^2 - \tfrac{315}{2048}c^3 + \cdots\right) \quad \text{Zitatende.}$$

δ) $k = 0$, $k^* > 0$ (rein kubische Rückstellung)

$$l(A) = \frac{4}{A\sqrt{k^*}}\mathsf{K}(\sqrt{2}/2)$$

Die Reihenentwicklung des vollständigen elliptischen Integrals 1. Gattung nach dem Modul k wird für den folgenden Vergleich der Linearisierungen noch von Interesse sein:

$$\mathsf{K}(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + (\tfrac{1}{2})^2k^2 + (\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4})^2k^4 + (\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6})^2k^6 + \cdots\right)$$

Vergleich der beiden Linearisierungsmethoden

Zur Gewährung der Übersichtlichkeit betrachten wir hier allein die Funktion der Rollradiendifferenz

$$\Delta r(y) = ky + k^* y^3$$

hinsichtlich ihres Verhaltens bei der Linearisierung. Bezeichnen wir die Beschreibungsfunktion der harmonische Linearisierung mit λ, so erhalten wir dafür mittels der harmonischen Linearisierung folgende Form:

$$\lambda(A) = k + \tfrac{3}{4}k^* A^2$$

Die äquivalente Linearisierung der Funktion der Rollradienänderung berechnen wir aus der Periodendauer $l(A)$

$$\gamma_e(A) = \left(\frac{2\pi}{l(A)}\right)^2$$

Im folgenden werden die drei prinzipiellen Lösungen gegenübergestellt:

β) $k^* = 0$ (lineare Rückstellung)
Mit $k^* = 0$ geht das elliptische Integral in ein elementares Integral über, aus dessen Lösung wir erwartungsgemäß die äquivalente Konizität als Konstante erhalten:

$$\gamma_e(A) = k$$

δ) $k = 0$, $k^* > 0$ (rein kubische Rückstellung)
für die äquivalente Konizität ergibt sich

$$\gamma_e(A) = \left(\frac{2\pi}{\mathsf{K}(\sqrt{2}/2)}\right)^2 k^* A^2$$

Entwickeln wir K für den Modul $k = \sqrt{2}/2$

$$\mathsf{K}(\sqrt{2}/2) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{9}{256} + \tfrac{25}{2048} + \cdots\right)$$

so erhalten wir

$$\gamma_e(A) = \left(1 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{9}{256} + \tfrac{25}{2048} + \cdots\right)^{-2} k^* A^2$$

Die äquivalente Linearisierung ergibt einen Vorfaktor von 0,7178. Im Vergleich hierzu beträgt der Vorfaktor von k^* bei der harmonischen Linearisierung ¾. Das heißt, daß bei einem rein kubischen Verlauf der Δr-Funktion die harmonische Linearisierung zu äquivalenten Konizitäten führt,

die 4,5 % höher als bei der äquivalenten Linearisierung liegen. Der Fehler in der Wellenlänge ist mit 2.2 % halb so groß.
In SIMPACK sind beide Verfahren zu Linearisierung der Berührgeometrie realisiert. Der allgemeinere Anwendungsbereich ist für die harmonische Linearisierung gegeben, da mit dieser Methode auch um Lagen linearisiert werden kann, die mit der Kinematik des frei rollenden Radsatzes nicht zusammenfallen wie es z.B. beim Bogenlauf gegeben ist.

Wir über uns

Willi Kortüm

http://www.op.dlr.de/FF-DR/dr_fs/staff/kortuem/kortuem.html

- geb. 1938, inzwischen ein dynamischer Klassiker
- Teamchef der SIMPACK-Entwicklungsmannschaft
- studierte von 1959 - 1965 Mathematik und Regelungstechnik an der TH Darmstadt
- 1967 - 1970: NASA Fellowship, Stanford University, Abschluß: Ph.D. in Applied Mechanics
- seit 1965 bei DVL, DFVLR und jetzt DLR Abteilungsleiter der Fahrzeugsystemdynamik, sowie Leiter des Teilprogramms „Technologien für Verkehrssysteme“
- seit 1981 Lehrbeauftragter an der TU München, seit 1992 Honorarprofessor für Mechanik mit der Vorlesung: „Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen“
- Vize-Präsident der International Association of Vehicle System Dynamics (IAVSD), Co-Editor der gleichnamigen Zeitschrift
- schafft es, in schöner Regelmäßigkeit die Bänke der Carl-Cranz-Gesellschaft mit Kursen wie „Fahrzeug-Systemdynamik und Kalman-Filterung, etc. zu füllen
- bezeichnet Kontinuität, Zuverlässigkeit und „geht nicht gibts nicht“ als seine Prinzipien
- fühlt sich seit einigen Tennis-Teilerfolgen gegen jugendliche Mitarbeiter um fünfzehn Jahre jünger

Moritz Gretzschel

http://www.op.dlr.de/FF-DR/dr_fs/staff/gretzschel/gretzschel.html

- geb. 1970 in München, studierte an der Technischen Universität München Maschinenbau
- diplomierte in der Abteilung Fahrzeug-Systemdynamik der DLR über die konstruktiven Möglichkeiten, den Modellrollprüfstand von Dr. Jaschinski mit geregelten generischen Radsätzen auszustatten
- promoviert seit 1995 über Innovative Antriebskonzepte an Schienenfahrzeugen und deren Regelung
- lebt gedanklich in vergangenen Zeiten, verachtet seinen Computer und liebt seinen Wählscheibenfernsprecher
- wurde bei der DLR jäh zur Beschäftigung mit Rechnern gezwungen. Erkannte allerdings bald deren vortreffliche Eignung zur Vervollkommnung des eigentlichen Lebensinhalts: der Eisenbahn
- hat ein sehr schlechtes Gewissen, seit der technische Ästhet einsehen mußte, daß er im Begriff ist, aus einem klassisch einfachen Radsatz einen Wust aus Lagern, Zahnrädern, Schläuchen und Dichtungen zu machen
- schwärmt für Motorräder, sofern er beim Fahren sein Spiegelbild im Tank sehen kann
- wird, seit er leichtsinniger weise sein unglaubliches Zeichentalent preisgab, zur Illustration der Abteilungsgeschichte gezwungen